Ministerul Educaţiei Naţionale
Universitatea Maritimă din Constanţa
Fundaţia „Traian Lalescu"

# Concursul Naţional Studenţesc de Matematică „Traian Lalescu" Ediţia a X-a, Constanţa, 4-6 mai 2017

Secţiunea A

**1.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Decideţi dacă limita

$$\lim_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to(0,0,\ldots,0)} \frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$$

există. În caz afirmativ, determinaţi-o.

*Soluţie:* Notăm limita din enunţ cu $L_n$.
Pentru $n=1$, $L_1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$, care nu există **(1p)**, deoarece limitele laterale sunt diferite **(1p)**.
Pentru $n=2$, oricum ne-am lua $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{\lambda}{n}}{\frac{\lambda^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lambda}{\lambda^2+1}$ **(3p)**, deci $L_2$ nu există **(1p)**.
Pentru $n\geq 3$, $\left|\frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\right| \leq \left|\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\right|\cdot|x_3x_4\ldots x_n| \leq \frac{1}{2}|x_3x_4\ldots x_n|$ **(3p)**, deci $L_n=0$ **(1p)**. $\square$

**2.** Fie $G$ şi $H$ două subgrupuri ale grupului aditiv $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Arătaţi că $G$ şi $H$ sunt izomorfe dacă şi numai dacă ele sunt egale.

*Soluţie:* „$\Leftarrow$": Evident.
„$\Rightarrow$": Pentru orice izomorfism de grupuri $\varphi : G \to H$ şi orice $a\in G$ are loc $ord(\varphi(a)) = ord(a)$ .......... 2p
Oricare ar fi $a \in \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$, $ord(a)$ este finit .......... 3 p
Oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ are un unic subgrup cu $n$ elemente, notat $U_n$ .......... 3 p

Fie $a \in G$ de ordin $n$. Atunci $| < a > | = n$, deci $< a >= U_n$. Analog $< \varphi(a) >= U_n$, deci $a \in < \varphi(a) > \subseteq H$. Prin urmare, $G \subseteq H$. Analog, $H \subseteq G$. ..................... 2 p
Total ............................................................... 10 p $\square$

**3.** Fie numerele reale $a$, $b$, $c$, $d$ cu proprietatea că $a$, $b$, $c$ nu sunt toate nule. Determinaţi distanţa de la planul de ecuaţie $ax+by+cz+d=0$ la paraboloidul de ecuaţie $z = x^2+y^2$.

*Soluţie:* Notăm planul din enunţ cu $\alpha$, paraboloidul cu $\mathcal{P}$, iar distanţa cerută cu $D$.
Observăm că dacă $\alpha \cap \mathcal{P} = \emptyset$, atunci $D$ va fi distanţa dintre $\alpha$ şi unul dintre punctele de tangenţă ale planelor tangente la $\mathcal{P}$ care sunt paralele cu $\mathcal{P}$ **(1p)**.
Vom căuta aceste puncte impunând condiţia ca direcţia normală la plan să coincidă cu direcţia normală la paraboloid în punctul „generic".
Dacă $c = 0$, $\alpha \parallel Oz$, deci, întrucât proiecţia lui $\mathcal{P}$ pe $(xOy)$ e întregul plan $(xOy)$, $\alpha \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, deci $D = 0$ **(2p)**.
Dacă $c \neq 0$, condiţia relativă la direcţiile normale se concretizează în punctul de tangenţă $(x_0, y_0, z_0) = \left(-\frac{a}{2c}, -\frac{b}{2c}, \frac{a^2+b^2}{4c^2}\right)$ **(2p)**. Cu această ocazie se constată că $\mathcal{P}$ admite un singur plan tangent paralel cu $\alpha$, pe care îl notăm cu $\beta$ şi care are ecuaţia $ax+by+cz+\frac{a^2+b^2}{4c^2} = 0$ **(1p)**.
Dacă planul $\alpha$ şi originea sunt de aceeaşi parte a planului $\beta$ (ideea acestei discuţii **(1p)**), situaţie caracterizată de condiţia

$$\left(0 - \frac{a^2+b^2}{c}\right)\left(d - \frac{a^2+b^2}{c}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 4cd \leq a^2+b^2,$$

atunci $\alpha \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, deci $D = 0$ **(1p)**.
Dacă planul $\alpha$ şi originea sunt de o parte şi de alta a planului $\beta$, situaţie caracterizată de condiţia $4cd > a^2+b^2$, atunci $D$ va fi egală cu distanţa de la punctul $(x_0, y_0, z_0)$ la planul $\alpha$, deci

$$D = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{4cd-a^2-b^2}{4|c|\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \textbf{(2p)}. \quad \square$$

**4.** Considerăm un corp finit $K$ de caracteristică diferită de 2 şi astfel încât $|K| > 5$. Arătaţi că orice element al lui $K$ se poate scrie ca sumă de trei pătrate de elemente nenule din $K$.

*Soluţie:* Fie $S = \{x^2 | \, x \in K^*\}$. Atunci $|S| = \frac{|K|-1}{2}$ ................................ 1p
Fie $S_0 = S \cup \{0\}$. Atunci $|S_0| = \frac{|K|+1}{2} > \frac{|K|}{2}$. Deci $S_0 + S_0 = K$ (folosind că: oricare ar fi $G$ grup abelian finit si oricare ar fi $A \subseteq G$ cu $|A| > |G|/2$ are loc $G = A + A$) ....... 2 p
Fie $N = K^* \setminus S$. Atunci $S \cap N = \emptyset, |S| = |N| = \frac{|K|-1}{2}$; pentru orice $x \in S, xS = S$ şi $xN = N$. ............................................................... 1 p
Pentru orice $a \in K \setminus \{-1, 1\}$, luând $x = \frac{a+1}{2} \neq 0$ şi $y = \frac{a-1}{2} \neq 0$ avem $a = x^2 - y^2$ .. 2 p
Pentru orice $n \in N$ există $a, b \in K \setminus \{0\}$ cu $n = a^2 + b^2$, deci $N \subseteq S + S$ .......... 1 p

Cum $|K| \geq 7$, există $a \in S \setminus \{-1, 1\}$. Pentru astfel de $a$, există $y \neq 0$ cu $a = x^2 - y^2$. Rezultă că $x^2 \in S + S$, deci $S = x^2 S \subseteq (S + S)S = S + S$. Prin urmare, $K^* \subseteq S + S$. 1 p
Avem $S + S + S \supseteq K^* + S$ şi $|K^* + S| \geq |K^*|$, deci $|S + S + S| \geq |K| - 1$. Dacă există $x \in K \setminus (S + S + S)$ rezulta $x = 0$ .................................................. 1 p
Fie $a \neq 0$, rezultă $-a^2 \in S + S$, de unde deducem existenţa elementelor $b, c \in K^*$ astfel încât $-a^2 = b^2 + c^2$, de unde $0 = a^2 + b^2 + c^2$ ........................................ 1 p
Total .................................................................. 10 p $\square$