Ministerul Educaţiei Naţionale Universitatea Maritimă Constanţa

Fundaţia „Traian Lalescu”

CONCURSUL NAŢIONAL STUDENŢESC DE MATEMATICĂ

„TRAIAN LALESCU”

Constanţa, 4-6 mai 2017

SECŢIUNEA B – SOLUŢII ȘI BAREME

Problema 1. Considerăm matricea $A = I_n - 2XX^T$, unde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, pentru care $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \neq 0$ şi $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

a) Să se arate că matricea *A* este ortogonală.

b) Aflaţi valorile proprii ale matricei A şi determinaţi o bază în raport cu care matricea *A* are forma canonică Jordan.

c) Determinaţi X, ştiind că $(1,1,\dots,1)^T$ este un vector propriu pentru *A*.

Soluţie. a) Observăm că

$$A^2 = (I_n - 2XX^T)(I_n - 2XX^T) = I_n - 4XX^T + 4XX^TXX^T = I_n,$$

deoarece $X^TX = < X, X > = \parallel X \parallel^2 = 1$...**1p**

De asemenea, se observă că

$$A^T = (I_n - 2XX^T)^T = I_n - 2(XX^T)^T = A.$$

Deci, $A^2 = I_n \Leftrightarrow A^{-1} = A = A^T \Leftrightarrow A -$ ortogonală. **1p**

b) Deoarece *A* este simetrică rezultă că este diagonalizabilă și toate valorile sale proprii sunt numere reale. Cum *A* conservă norma euclidiană, rezultă, pentru λ – valoare proprie și U - vector propriu corespunzător lui λ, că

$$\parallel U \parallel = \parallel AU \parallel = \parallel \lambda U \parallel = |\lambda| \parallel U \parallel,$$

deci *A* poate avea doar valorile proprii ± 1...**1p**

Mai mult, observăm că $\lambda = 1$ dacă și numai dacă $< X, U > = 0$, deci subspațiul de vectori proprii corespunzător valorii proprii 1 este format din toți vectorii ortogonali pe *X*, de dimensiune *n*-1. Vom nota $|x_j| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| > 0$, deoarece $\parallel X \parallel = 1$. Presupunem $U = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$. Atunci $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$. Punând $\alpha_k = 1$, pentru $k \neq j$, și $\alpha_i = 0$, pentru $i \neq k, j$ obținem $\alpha_j = -\frac{x_k}{x_j}$, deci vectorii $V_1, \dots, V_{n-1}$, care au pe componenta $k \neq j$ valoarea 1 iar pe componenta j valoarea $-\frac{x_k}{x_j}$, generează subspațiul propriu corespunzător lui $\lambda = 1$. **3p**

Pentru –1 avem, evident, $V_n = X$. O bază în care *A* are forma diagonală este $\{V_1, \dots, V_n\}$. **1p**

c) Având în vedere punctul b), putem avea *AU* = *U* sau *AU* = -*U*.

1. $AU = U \Leftrightarrow U - XX^TU = U \Leftrightarrow 2 < X, U > X = 0 \Leftrightarrow < X, U >= 0 \Leftrightarrow x_1 + \cdots + x_n = 0$, ceea ce contrazice ipoteza. **1,5p**
2. $AU = -U \Leftrightarrow X$ şi U sunt coliniari. Cum $\| X \| = 1$, rezultă că

$$X = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)^T .$$

……………………………………………………………………………………………**1,5p**

Problema 2. Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin

$$x_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{1}{i \cdot j}, \forall n \geq 1.$$

Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^{\alpha}},$$

unde α este un parametru real.

Soluție. Observăm că

$$2x_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = y_n^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Cum şirul $y_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ este nemărginit iar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, deci şirul $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ este mărginit, rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit. …………………………………………**2p**

Mai departe, notând $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = y_n - \ln n$, ……………………………….…**2p**

putem scrie

$$2x_n = y_n^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = c_n^2 + 2c_n \ln n + \ln^2 n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{2x_n}{\ln^2 n} = \frac{c_n^2}{\ln^2 n} + 2\frac{c_n}{\ln n} + 1 - \frac{1}{\ln^2 n} S_n.$$

Dar (c_n) este convergent şi are limita c. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\ln^2 n} = \frac{1}{2}$$

……………………………………………………………………………………………...**3p**

şi deci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^{\alpha}}$ şi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{ln^{2\alpha} n}$ au aceeași natură. ……………………………………….....**1p**

În mod evident, a doua serie este divergentă pentru orice $\alpha \le 0$. Pentru $\alpha > 0$ şirul tinde descrescător la 0 şi putem aplica criteriul condensării, obținând că $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{ln^{2\alpha} n}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{n^{2\alpha} ln^{2\alpha} 2}$, care este divergentă pentru orice $\alpha > 0$ (limita din criteriul raportului este 2).

În concluzie, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^{\alpha}}$ este divergentă pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$. …..…………….....…………..…**2p**

Problema 3. Fie V un spaţiu vectorial real, de dimensiune finită, şi $T, S: V \to V$ două aplicaţii liniare, cu proprietăţile $T \circ S = T$ şi $S \circ T = S$.

a) Să se arate că rang T = rang S.
b) Să se arate că dacă aplicaţiile T şi S au aceeaşi imagine, atunci S = T.

Soluţie. a) Din teorema dimensiunii pentru aplicaţii liniare, avem:

$$\dim(\operatorname{Im} T) = \dim V - \dim(\operatorname{Ker} T) \Leftrightarrow \operatorname{rang} T = n - \dim(\operatorname{Ker} T).$$

………………………………………………………………………………...**2p**

Vom arăta că, în ipotezele date, $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} S$.

Dacă $S(x) = 0$. Atunci $T\big(S(x)\big) = 0 \Leftrightarrow T(x) = 0$, deci $\operatorname{Ker} S \subset \operatorname{Ker} T$ şi analog invers. În consecinţă, $n - \operatorname{rang} T = n - \operatorname{rang} S \Leftrightarrow \operatorname{rang} T = \operatorname{rang} S$. …………………………………....…**2p**

b) Arătăm că S şi T sunt proiecţii ($S^2 = S$ si $T^2 = T$). Avem $(S \circ T) \circ S = S \circ S$ şi $S \circ (T \circ S) = S \circ T = S$, astfel încât $S \circ S = S$. Analog se demonstrează că $T \circ T = T$. ……………………….**3p**

Fie $x \in V$, arbitrar, deci $T(x) \in \operatorname{Im} T = \operatorname{Im} S$; există $y \in V$ astfel încât $T(x) = S(y)$, de unde

$$S\big(T(x)\big) = S\big(S(y)\big) = S(y) = T(x)$$

şi, pe de altă parte, din ipoteză, $S \circ T = S$, deci $S\big(T(x)\big) = S(x)$, astfel încât $T(x) = S(x)$, oricare ar fi $x \in V$, adică $T = S$. ……………………………………………………………………….**3p**

Problema 4. Fie $c > 1$ şi $f: [0, c] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, crescătoare, cu $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$. Să se calculeze

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^1 f(x)(f(x+t) - f(x))dx.$$

Soluţie. Pentru început, vom arăta că

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^1 (f(x+t) - f(x))dx = f(1) - f(0).$$

Fie $t \in [0, c-1]$. Folosind schimbarea de variabilă $y = x + t$, obţinem

$$\int_0^1 f(x+t)dx = \int_t^{t+1} f(y)dy\,.$$

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t}\int_0^1 \big(f(x+t)-f(x)\big)dx = \lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t}\left(\int_t^{t+1} f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx\right) = \lim_{t\searrow 0}(f(t+1)-f(t)) =$$

$$= f(1) - f(0),$$

conform regulii lui l'Hospital. ……………………..…………………………………………….**3p**

Vom arăta că, pentru orice funcţie $f\colon[0,c] \to \mathbb{R}$, continuă şi crescătoare, avem

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t}\int_0^1 (f(x+t)-f(x))^2 dx = 0.$$

Fie

$$g\colon[0,c-1] \to \mathbb{R},\, g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^1 (f(x+t)-f(x))dx, & dac\breve{a}\ t \in (0, c-1]; \\ f(1)-f(0), & dac\breve{a}\ t = 0. \end{cases}$$

Functia g este continuă, deci mărginită. Există $M > 0$ astfel încât, pentru orice $t \in (0, c-1]$, $0 \le g(t) \le M$.

Functia f este uniform continuă. Rezultă că, pentru orice $\varepsilon > 0$, exista $\delta_\varepsilon > 0$, $\delta_\varepsilon < c - 1$, astfel încât, pentru orice $x \in [0,1]$ şi orice $t \in (0, \delta_\varepsilon)$, avem

$$0 \le f(x+t) - f(x) < \tfrac{\varepsilon}{2M}.$$

Deci, pentru orice $t \in (0, \delta_\varepsilon)$, rezultă

$$0 \le \frac{1}{t}\int_0^1 (f(x+t)-f(x))^2 dx \le \frac{1}{t}\int_0^1 \frac{\varepsilon}{2M}\big(f(x+t)-f(x)\big)dx = \frac{\varepsilon}{2M}g(t) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,$$

deci, $\lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t}\int_0^1 (f(x+t)-f(x))^2 dx = 0$. ……………………………………………………......**4p**

$$\frac{1}{t}\int_0^1 f(x)\big(f(x+t)-f(x)\big)dx =$$

$$= \frac{1}{2t}\int_0^1 ((f(x+t))^2 - (f(x))^2)dx - \frac{1}{2t}\int_0^1 \big(f(x+t)-f(x)\big)^2 dx\,.$$

Obţinem $\lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t}\int_0^1 f(x)(f(x+t)-f(x))dx = \frac{1}{2}((f(1))^2 - (f(0))^2) = \frac{1}{2}$. ……..…………...**3p**