

Concursul Național Studențesc de Matematică  
„Traian Lalescu”  
Ediția a X-a, Constanța, 4-6 mai 2017

Secțiunea A

1. Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Decideți dacă limita

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)} \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

există. În caz afirmativ, determinați-o.

2. Fie  $G$  și  $H$  două subgrupuri ale grupului aditiv  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Arătați că  $G$  și  $H$  sunt izomorfe dacă și numai dacă ele sunt egale.
3. Fie numerele reale  $a, b, c, d$  cu proprietatea că  $a, b, c$  nu sunt toate nule. Determinați distanța de la planul de ecuație  $ax + by + cz + d = 0$  la paraboloidul de ecuație  $z = x^2 + y^2$ .
4. Considerăm un corp finit  $K$  de caracteristică diferită de 2 și astfel încât  $|K| > 5$ . Arătați că orice element al lui  $K$  se poate scrie ca sumă de trei pătrate de elemente nenule din  $K$ .