Ministerul Educaţiei Naţionale Universitatea Maritimă Constanţa

Fundaţia ,,Traian Lalescu”

CONCURSUL NAŢIONAL STUDENŢESC DE MATEMATICĂ

,,TRAIAN LALESCU”

Constanţa, 4-6 mai 2017

SECŢIUNEA B

Problema 1. Considerăm matricea $A = I_n - 2XX^T$, unde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, pentru care $x_1 + x_2 + \dots + x_n \neq 0$ şi $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$.

a) Să se arate că matricea *A* este ortogonală.
b) Aflaţi valorile proprii ale matricei A şi determinaţi o bază în raport cu care matricea *A* are forma canonică Jordan.
c) Determinaţi X, ştiind că $(1,1,\dots,1)^T$ este un vector propriu pentru *A*.

Problema 2. Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin

$$x_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{1}{i\cdot j}, \forall n \geq 1.$$

Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^{\alpha}},$$

unde α este un parametru real.

Problema 3. Fie *V* un spaţiu vectorial real, de dimensiune finită, şi $T, S: V \to V$ două aplicaţii liniare, cu proprietăţile $T \circ S = T$ şi $S \circ T = S$.

a) Să se arate că rang *T* = rang *S*.
b) Să se arate că dacă aplicaţiile *T* şi *S* au aceeaşi imagine, atunci *S* = *T*.

Problema 4. Fie $c > 1$ şi $f: [0, c] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, crescătoare, cu $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$. Să se calculeze

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^1 f(x)(f(x+t) - f(x))dx.$$

Timp de lucru: 4 ore.