Ministerul Educaţiei Naţionale

Universitatea Maritimă Constanţa

Fundaţia Traian Lalescu

Concursul Naţional Studenţesc de Matematică “Traian Lalescu”

Constanţa 4-6 Mai 2017

Secţiunea E

1. Determinaţi funcţiile olomorfe $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$,

$f(z)=f(x+\mathrm{i}\cdot y)=u(x,y)+\mathrm{i}\cdot v(x,y)$, pentru care $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=2\cdot \mathrm{e}^{x}\cdot\cos y$.

2. Se consideră funcţia $f:D\subset\overline{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{z^{12}\cdot\sin\left(\dfrac{3\pi\mathrm{i}}{z}\right)}{\left(z^2+2\right)^5\cdot\left(z^2+\mathrm{i}\cdot z+6\right)}$.

a) Stabiliţi domeniul D de definiţie, precizând natura punctelor singulare (inclusiv natura punctului de la infinit).

b) Calculaţi $I=\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$.

3. Să se determine transformata Laplace a funcţiei original

$$f(t)=\int_0^t e^x\cdot(t-x)^3\cdot[\sin(t-x)]^{(n)}\,dx,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

4. a) Dezvoltaţi în serie Fourier funcţia $f:[-\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}]\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)$, $|a|<1$.

b) Calculaţi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n}$.

Timp de lucru: 4 ore