



**Concursul Național Studențesc de Matematică
„Traian Lalescu”
Constanța, 8-10 Mai 2025**

**BAREM
SECȚIUNEA A**

Problema 1

Găsiți funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ de clasă C^2 care au proprietatea că există $\alpha > 1$ astfel încât

$$f''(x)f(x) \geq \alpha(f'(x))^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soluție

Calculul primei derivate a funcției $\frac{1}{(f(x))^{\alpha-1}}$

$$\left(\frac{1}{f^{\alpha-1}(x)}\right)' = -\frac{(\alpha-1)f'(x)}{f^\alpha(x)} \quad 1p$$

Calculul celei de-a doua derivate a funcției $\frac{1}{(f(x))^{\alpha-1}}$

$$\left(\frac{1}{f^{\alpha-1}(x)}\right)'' = -(\alpha-1) \frac{f''(x)f(x) - \alpha(f'(x))^2}{f^{2\alpha-1}(x)} \leq 0 \quad 2p$$

Deci, tocmai am aflat că funcția $\frac{1}{f^{\alpha-1}}$ este o funcție concavă și pozitivă.

Observarea faptului că singurele funcții concave și pozitive (definite pe \mathbb{R}) sunt funcțiile constante. 2p

Demonstrația faptului că singurele funcții concave și pozitive sunt cele constante. 5p

Problema 2

Determinați matricile $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ care satisfac relația

$$2025A^{2025} = A^{2024} + A^{2023} + \dots + A.$$

Soluție

Fie λ valoare proprie a lui A . Arătăm mai întâi că $|\lambda| < 1$.

Dacă $|\lambda| \geq 1$, atunci $|\lambda|^{2025} \geq |\lambda|^k$, pentru fiecare $k \in \{1, 2, \dots, 2024\}$ și prin urmare $2025|\lambda|^{2025} > |\lambda|^{2024} + |\lambda|^{2023} + \dots + |\lambda|$. Dar

$$2025|\lambda|^{2025} = |\lambda|^{2024} + \lambda^{20} + \dots + \lambda \leq |\lambda|^{2024} + |\lambda|^{2023} + \dots + |\lambda| \quad 3p$$

de unde obținem contradicția

Cum $|\lambda| < 1$ avem că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât 1p

$$|\lambda|^k \leq \frac{1}{2n} \quad (\forall) k \geq n_0$$



Atunci, pentru $k \geq n_0$ avem

$$|Tr(A^k)| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \right| \leq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \quad 2p$$

și cum $Tr(A^k) \in \mathbb{Z}$ obținem $Tr(A^k) = 0$ 1p

Cu sume Newton obținem că toate valorile proprii sunt 0, deci $A^n = O_n$.

Dacă $m_A \in \mathbb{Z}[X]$ este polinomul minimal al lui A, atunci avem

$$m_A | (X^n, 2025X^{2025} - X^{2024} - X^{2023} - \dots - X) \Rightarrow m_A | X, \quad 3p$$

deci $A = O_n$

Problema 3

Fie $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă în 0 cu $f(0) = 0$. Determinați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{2^n}^{2^{n+1}} f\left(\frac{\ln x}{x}\right) dx$$

Soluție

Fie $\varepsilon > 0$. Dacă f este derivabilă în 0, atunci există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât, pentru orice

$0 < t < \delta_\varepsilon$, este valabilă următoarea inegalitate $\left| \frac{f(t)-f(0)}{t} - f'(0) \right| < \varepsilon$, adică $|f(t) - f'(0)t| < \varepsilon t$. 2p

Din $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\ln 2}{2^n} = 0$, atunci există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\frac{(n+1)\ln 2}{2^n} < \delta_\varepsilon \quad 1p$$

Fie $n \geq n_\varepsilon$. Pentru orice $x \in [2^n, 2^{n+1}]$ avem $0 < \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln 2^{n+1}}{2^n} = \frac{(n+1)\ln 2}{2^n} < \delta_\varepsilon$ și

$$\left| f\left(\frac{\ln x}{x}\right) - f'(0) \frac{\ln x}{x} \right| < \varepsilon \frac{\ln x}{x} \quad 2p$$

Prin integrare obținem $\int_{2^n}^{2^{n+1}} \left| f\left(\frac{\ln x}{x}\right) - f'(0) \frac{\ln x}{x} \right| dx \leq \varepsilon \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{\ln x}{x} dx$.

Din $\left| \int_{2^n}^{2^{n+1}} \left[f\left(\frac{\ln x}{x}\right) - f'(0) \frac{\ln x}{x} \right] dx \right| \leq \int_{2^n}^{2^{n+1}} \left| f\left(\frac{\ln x}{x}\right) - f'(0) \frac{\ln x}{x} \right| dx$, obținem că

$$\left| \int_{2^n}^{2^{n+1}} \left[f\left(\frac{\ln x}{x}\right) - f'(0) \frac{\ln x}{x} \right] dx \right| \leq \varepsilon \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{\ln x}{x} dx, \text{ adică } \left| \frac{\int_{2^n}^{2^{n+1}} f\left(\frac{\ln x}{x}\right) dx}{\int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{\ln x}{x} dx} - f'(0) \right| \leq \varepsilon$$

Deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{2^n}^{2^{n+1}} f\left(\frac{\ln x}{x}\right) dx}{\int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{\ln x}{x} dx} = f'(0) \quad 3p$$



Din $\int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_{2^n}^{2^{n+1}} = \frac{(2n+1)\ln^2 2}{2}$, rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{\ln x}{x} dx}{n} = \ln^2 2.$$

Din relațiile (1) și (2) de mai sus, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{2^n}^{2^{n+1}} f\left(\frac{\ln x}{x}\right) dx = f'(0) \ln^2 2$. 2p

Problema 4

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1) Pentru orice matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ există matricele $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $AX + YB = C$;
- 2) Pentru orice matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ există matricele $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^2U + VB^2 = C$.

Soluție

2) \rightarrow 1): Dacă $A^2U + VB^2 = C$ luăm $X = AU, Y = VB$ și avem $AX + YB = C$ 2p

Arătăm că 1) \Leftrightarrow 3), unde afirmația 3) este:

$$\det A \neq 0 \text{ sau } \det B \neq 0. \quad 1p$$

3) \rightarrow 1): Dacă $\det A \neq 0$ luăm $Y = O_n$ și $X = A^{-1}C$ și se verifică $AX + YB = C$.

Dacă $\det A \neq 0$ luăm $X = O_n$ și $Y = CB^{-1}$ și se verifică $AX + YB = C$ 1p

1) \rightarrow 3): Folosind metoda reducerii la absurd presupunem că $\det A = \det B = 0$ și arătăm că există $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pentru care ecuația $AX + YB = C$ nu are soluții.

Deoarece $\det A = 0$, liniile matricei A sunt liniar dependente. Există transformări elementare pe liniile matricei A astfel încât să facem prima linie egală cu zero, adică există o matrice inversabilă P pentru care $P \cdot A = A_1$, în care prima linie a matricei A_1 are toate elementele egale cu 0. Similar, deoarece $\det B = 0$, există o matrice ireversibilă Q pentru care $B \cdot Q = B_1$, în care prima coloană a matricei B_1 are toate elementele egale cu 0. 2p

Avem:

$$AX = YB = C \Leftrightarrow P^{-1}A_1X + YB_1Q^{-1} = C \Leftrightarrow A_1XQ + PYB_1 = PCQ (*)$$

Alegând $C = P^{-1} \cdot Q^{-1}$ în relația (*) obținem

$$A_1X_1 + Y_1B_1 = I_n \quad (X_1 = XQ, Y_1 = PY),$$

care nu are soluție deoarece în poziția (1,1) avem în stânga 0, iar în dreapta 1. 3p

Folosindu-ne de 3), afirmația 1) \rightarrow 2) este evidentă. 1p