Concursul Naţional Studenţesc de Matematică „Traian Lalescu”
Constanţa, 8-10 Mai 2025
SECŢIUNEA B

Soluţii şi barem de corectare

Problema 1. Fie A o matrice patratică de ordinul n ale cărei elemente sunt fie a fie b, unde a si b sunt doua numere reale diferite, strict pozitive, astfel încât $\operatorname{rang} A = 2$ şi pe fiecare linie şi coloană a matricei A se află cel puţin un a şi cel puţin un b.

a) Arătaţi că oricare două coloane ale lui A care încep cu acelaşi element sunt egale.

b) Fie U şi V două matrice pătratice cu elemente 0 sau 1 astfel încât $A = aU + bV$. Arătaţi că $\operatorname{rang} U = \operatorname{rang} V = 2$.

Soluţie şi barem de corectare. a) Fie k un indice de coloană pentru care $a_{1k} \neq a_{11}$ şi p un indice de linie pentru care $a_{p1} \neq a_{11}$ - aceştia există, cf. ipotezei. Evident, $a_{p1} = a_{1k}$. Atunci este uşor de văzut că $\Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} \\ a_{p1} & a_{pk} \end{vmatrix} \neq 0$.

Vom arăta că toate coloanele A_j ale lui A pentru care $a_{1j} = a_{11}$ sunt egale şi, evident, toate coloanele A_j pentru care $a_{1j} = a_{1k}$ sunt egale.

Fie $A_j, j \neq 1$ o coloana astfel încât $a_{1j} = a_{11}$. Pentru ca $\operatorname{rang} A = 2$ şi $\Delta \neq 0$ rezultă că A_j este o combinaţie liniară unică a coloanelor A_1 şi A_k :

$$A_j = \alpha A_1 + \beta A_k, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

.... 2p

Atunci,

$$\begin{cases} \alpha a_{11} + \beta a_{1k} & = a_{1j} = a_{11} \\ \alpha a_{p1} + \beta a_{pk} & = a_{pj} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha a_{11} + \beta a_{1k} & = a_{1j} = a_{11} \\ \alpha a_{1k} + \beta a_{pk} & = a_{pj} \end{cases}$$

Observăm că nu putem avea $a_{pj} = a_{11}$, pentru că luând minorul format cu linia q care conţine $a_{qj} = a_{1k}$ (sau, echivalent, $a_{qj} \neq a_{11}$) obţinem

$$\delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} & a_{1j} \\ a_{p1} & a_{pk} & a_{pj} \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{qj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} & a_{11} \\ a_{1k} & a_{pk} & a_{11} \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{1k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} & a_{11} \\ a_{1k} - a_{11} & a_{pk} - a_{1k} & 0 \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{1k} \end{vmatrix}.$$

.... 2p

Dacă $a_{pk} = a_{1k}$, atunci $\delta = (a_{1k} - a_{11}) \cdot (a_{1k}^2 - a_{11} a_{q_2}) \neq 0$.

Dacă $a_{pk} = a_{11}$, atunci

$$\delta = (a_{1k} - a_{11}) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} & a_{11} \\ 1 & -1 & 0 \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{1k} \end{vmatrix} = (a_{11} - a_{1k}) \begin{vmatrix} a_{1k} + a_{11} & a_{11} \\ a_{q2} + a_{q1} & a_{1k} \end{vmatrix} \neq 0,$$

deoarece $a_{q2} + a_{q1} \in \{a_{11} + a_{11}, a_{11} + a_{1k}, a_{1k} + a_{1k}\}$.

Dar în ambele situatii ar rezulta că $\operatorname{rang} A \geq 3$, contrazicând ipoteza. Astfel, $a_{pj} = a_{1k}$ şi, din unicitatea solutiei sistemului, rezultă $\alpha = 1$ şi $\beta = 0$, adică $A_j = A_1$. 2p

b) Dacă $a_{i,j} = a$, atunci

$$a = a \cdot u_{ij} + b \cdot v_{ij} \quad \Rightarrow \quad a \cdot (1 - u_{ij}) = b \cdot v_{ij}.$$

Cum $u_{ij}, v_{ij} \in \{0, 1\}$ şi $a \neq b$, avem $1 - u_{ij} = v_{ij} = 0$.
Analog, dacă $a_{ij} = b$, atunci $u_{ij} = 1 - v_{ij} = 0$.
Astfel, U şi V sunt unic determinate:

$$u_{ij} = \begin{cases} 1, & a_{ij} = a, \\ 0, & a_{ij} = b, \end{cases} \quad \text{şi} \quad v_{ij} = \begin{cases} 0, & a_{ij} = a, \\ 1, & a_{ij} = b. \end{cases}$$

....2p

Deoarece în A există un minor de tipul

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & \star \end{vmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{vmatrix} b & a \\ \star & b \end{vmatrix},$$

rezultă că în V există un minor de tipul

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \star \end{vmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \star & 1 \end{vmatrix},$$

deci $\operatorname{rang} V \geq 2$. Analog, $\operatorname{rang} U \geq 2$. 1p

Pe de altă parte, conform punctului a), coloanele lui U şi, respectiv, V, care încep cu acelaşi element, sunt egale, deci $\operatorname{rang} U \leq 2$ şi $\operatorname{rang} V \leq 2$. 1p

Problema 2. Fie (a_n) un şir de numere reale convergent la $\ell \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $a_n \neq \ell, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Presupunem că şirul (a_n) este monoton. Studiaţi limita şirului $([a_n])$ şi arătaţi că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n}$ converge, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n a_n]}{n}$ diverge.

b) Studiaţi limita şirului $([a_n])$ şi natura seriilor de la punctul $a)$ în cazul general (în care şirul poate fi nemonoton).

(Notă: Prin $[x]$ notăm partea întreagă a numărului real x.)

Soluţie şi barem de corectare. a) În cazul în care $\ell \notin \mathbb{Z}$, şirul $([a_n])$ va converge la $[\ell]$, fără a fi nevoie să folosim monotonia. Într-adevăr, vom avea că există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$[\ell] < \ell - \varepsilon < \ell < \ell + \varepsilon < [\ell] + 1. \tag{1}$$

Cum şirul converge la ℓ, toţi termenii de la un rang încolo vor fi în intervalul $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, deci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $[a_n] = [\ell], \forall n \geq n_0$. Atunci $[a_n] \to [\ell]$. 1p

Presupunem acum $\ell \in \mathbb{Z}$. Dacă şirul este descrescător, vom avea că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\ell < a_n < \ell + 1, \forall n \geq n_0, \tag{2}$$

deci $[a_n] = \ell, \forall n \geq n_0$. Atunci $[a_n] \to \ell$. În cazul în care (a_n) este crescător, deoarece $a_n \neq \ell, \forall n \in \mathbb{N}$, va exista $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\ell - 1 < a_n < \ell, \forall n \geq n_0, \tag{3}$$

deci $[a_n] = \ell - 1, \forall n \geq n_0$. Atunci $[a_n] \to \ell - 1$. 1p

În cazul în care (a_n) este monoton, deoarece este şi mărginit fiind convergent, prima serie este convergentă conform criteriului lui Abel. 1p

Ne ocupăm în continuare de cea de-a doua serie. Considerăm mai întâi cazul $\ell \notin \mathbb{Z}$. În acest caz, nu avem nevoie de monotonia şirului pentru a arăta divergenţa. Într-adevăr, pentru $\varepsilon > 0$ astfel încât (1) este adevărată, deoarece $a_n \to \ell$, vom avea că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_0$,

$$[\ell] < \ell - \varepsilon < (-1)^{2n} a_{2n} < \ell + \varepsilon < [\ell] + 1 \quad \text{şi} \quad -[\ell] - 1 < (-1)^{2n+1} a_{2n+1} < -[\ell].$$

Atunci

$$[(-1)^n a_n] = \begin{cases} [\ell], & n = \text{par}, \\ -[\ell] - 1, & n = \text{impar}. \end{cases}$$

Seria va deveni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n a_n]}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [\ell]}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1},$$

care este divergentă.

Presupunem acum că $\ell \in \mathbb{Z}$. Dacă (a_n) este descrescător, atunci vom avea din (2) că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_0$,

$$[\ell] = \ell < (-1)^{2n} a_{2n} < [\ell] + 1 \quad \text{şi} \quad -[\ell] - 1 < (-1)^{2n+1} a_{2n+1} < -[\ell].$$

În cazul în care (a_n) este crescător, vom avea din (3) că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_0$,

$$[\ell] - 1 < (-1)^{2n} a_{2n} < [\ell] \quad \text{şi} \quad -[\ell] < (-1)^{2n+1} a_{2n+1} < -[\ell] + 1.$$

În ambele cazuri, rezultă divergenţa ca mai sus. 3p

b) Dacă $\ell \notin \mathbb{Z}$, am arătat mai sus că $[a_n] \to [\ell]$.

În cazul în care $\ell \in \mathbb{Z}$, putem defini şirul

$$a_n := \begin{cases} \ell - \dfrac{1}{n}, & n = \text{par}, \\ \ell + \dfrac{1}{n}, & n = \text{impar}. \end{cases}$$

Atunci $a_n \to \ell$ şi

$$[a_n] = \begin{cases} \ell - 1, & n = \text{par}, \\ \ell, & n = \text{impar}. \end{cases}$$

Evident, nu există limita şirului $[a_n]$. 1p

Vom arăta că prima serie nu este neapărat convergentă. Pentru

$$a_n := \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)},$$

vom obţine seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)} \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n},$$

divergentă. 1p

A doua serie nu este neapărat divergentă dacă $\ell \in \mathbb{Z}$. Pentru

$$a_n := \ell + \frac{(-1)^n}{n} \to \ell,$$

vom obţine

$$(-1)^n a_n = \begin{cases} \ell + \dfrac{1}{n}, & n = \text{par}, \\ -\ell + \dfrac{1}{n}, & n = \text{impar}. \end{cases}$$

Atunci

$$[(-1)^n a_n] = \begin{cases} \ell, & n = \text{par}, \\ -\ell, & n = \text{impar}, \end{cases}$$

iar seria devine

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ell}{n},$$

care este în mod evident convergentă. 2p

Problema 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 = B^2 = I_n$ şi $AB + BA = -2(A + B + I_n)$.

Demonstraţi că:

(a) $AB = BA$;

(b) $\operatorname{rang}(A + I_n) + \operatorname{rang}(B + I_n) \leq n$.

Soluţie şi barem de corectare. a) Fie $C = A + I_n$ şi $D = B + I_n$. Atunci $CD = AB + A + B + I_n$ şi $DC = BA + A + B + I_n$. Rezultă că $CD + DC = AB + BA + 2(A + B + I_n) = O_n$. De asemenea, $I_n = A^2 = (C - I_n)^2 = C^2 - 2C + I_n$, ceea ce conduce la $C^2 = 2C$ şi, în mod similar, $D^2 = 2D$. ...3p

În continuare, avem

$$CD = -DC = -\frac{1}{2}D^2C = \frac{1}{2}D(-DC) = \frac{1}{2}(DC)D = \frac{1}{2}(-CD)D = -C\left(\frac{1}{2}D^2\right) = -CD,$$

deci $CD = O_n$, ceea ce conduce şi la $DC = O_n$. În consecinţă, $AB - BA = CD - DC = O_n$, deci $AB = BA$. 2p

b) Avem $(C+D)^2 = C^2 + D^2 + CD + DC = 2C + 2D$. Împreuna cu $C^2 = 2C$ şi $D^2 = 2D$, rezultă că C, D şi $C + D$ verifică ecuaţia $X^2 = 2X$, deci toate cele trei matrice sunt diagonalizabile şi au valorile proprii din mulţimea $\{0, 2\}$. 2p

În consecinţă, $\operatorname{rang} C = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} C$, $\operatorname{rang} D = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} D$ şi

$$\operatorname{rang}(C + D) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(C + D) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} C + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} D = \operatorname{rang} C + \operatorname{rang} D.$$

Atunci $\operatorname{rang}(A + I_n) + \operatorname{rang}(B + I_n) = \operatorname{rang}(C + D) \leq n$. 2p

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $C + D$ este inversabilă, ceea ce din $(C + D)^2 = 2(C + D)$ conduce la $C + D = 2I_n$, deci $A + B = O_n$. 1p

Problema 4. Considerăm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcţie impară, de clasă C^{2025}, pentru care $f^{(2k+1)}(0) = 0$ pentru orice $k = \overline{1, 1011}$ şi $f^{(2025)}(0) > 0$.

a) Arătaţi că există $\varepsilon > 0$ astfel încât seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n^{f(x)}}\right)$$

converge pentru orice $x \in (0, \varepsilon)$.

b) Pentru fiecare $x \in (0, \varepsilon)$, notăm suma seriei precedente cu $S(x)$ şi $g(x) = \dfrac{1}{S(x)}$. Studiaţi convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

unde $\alpha > 0$.

Soluţie şi barem de corectare. a) Deoarece f este impară, va rezulta f' pară, apoi f'' impară, f''' pară etc. Atunci $f(0) = f''(0) = ... = f^{(2024)}(0) = 0$. 1p

În final, folosind şi ipotezele problemei, va rezulta din formula lui Taylor că, pentru orice $x > 0$, există $c_x \in (0, x)$ astfel încât

$$f(x) = \frac{f^{(2025)}(c_x)}{2025!} \cdot x^{2025}. \qquad (*)$$

Cum f este de clasă C^{2025} şi $f^{(2025)}(0) > 0$, va exista $\varepsilon > 0$ astfel încât $f^{(2025)} > 0$ pe $(0, \varepsilon)$, deci folosind $(*)$, vom avea că $f(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, \varepsilon)$. 1p

Folosind criteriul de comparaţie cu limită, vom avea, pentru fiecare $x \in (0, \varepsilon)$ fixat, că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n^{f(x)}}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{f(x)+1}},$$

care este convergentă. 1p

b) Observăm, pentru început, că $S(x) \geq \ln 2$, pentru fiecare $x \in (0, \varepsilon)$, deci g este bine definită.

Pentru fiecare $x \in (0, \varepsilon)$ fixat, considerăm funcţia $h_x : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, cu

$$h_x(t) = t \ln\left(1 + t^{f(x)}\right).$$

Aceasta este în mod evident strict crescătoare, deci $h_x\left(\dfrac{1}{t}\right)$ este strict descrescătoare. Atunci, pentru orice $n \geq 1$ şi $x \in (0, \varepsilon)$, vom avea

$$h_x\left(\frac{1}{n}\right) \geq h_x\left(\frac{1}{t}\right) \geq h_x\left(\frac{1}{n+1}\right), \quad \forall t \in [n, n+1],$$

deci

$$h_x\left(\frac{1}{n}\right) \geq \int_n^{n+1} h_x\left(\frac{1}{t}\right) dt \geq h_x\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Vom obţine prin sumare de la 1 la N şi, apoi, făcând $N \to \infty$ că

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_x\left(\frac{1}{n}\right) \geq \int_1^{\infty} h_x\left(\frac{1}{t}\right) dt \geq \sum_{n=2}^{\infty} h_x\left(\frac{1}{n}\right) = S(x) - \ln 2. \qquad (4)$$

Folosind punctul a), va rezulta că integrala $\displaystyle\int_1^{\infty} h_x\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge. 2p

Vom calcula limita

$$\ell = \lim_{x\to 0_+} x^{2025} \cdot S(x) \overset{(4)}{=} \lim_{x\to 0_+} x^{2025} \cdot \int_1^{\infty} \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t^{f(x)}}\right) dt.$$

Calculăm integrala

$$I_x = \int_1^{\infty} \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t^{f(x)}}\right) dt.$$

Cu schimbarea de variabilă

$$\frac{1}{t^{f(x)}} = y, \quad dt = -\frac{1}{f(x)} \cdot y^{-\frac{1}{f(x)}-1} dy$$

obţinem

$$I_x = \frac{1}{f(x)} \cdot \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{\pi^2}{12}.$$

(Faptul că $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \frac{\pi^2}{12}$ rezultă prin dezvoltare în serie de puteri şi integrare termen cu termen, dar este suficient ca integrala să fie convergentă la un număr strict pozitiv). 2p

În plus, folosind $(*)$ şi faptul că f este de clasă C^{2025}, obţinem

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)}{x^{2025}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{f^{(2025)}(c_x)}{2025!} = \frac{f^{(2025)}(0)}{2025!}.$$

.... 1p

Atunci

$$\ell = \lim_{x\to 0_+} x^{2025} \cdot S(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{x^{2025}}{f(x)} \cdot \frac{\pi^2}{12} = \frac{2025!}{f^{(2025)}(0)} \cdot \frac{\pi^2}{12} > 0.$$

Va rezulta, pentru orice $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{2025\alpha} \cdot g\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) = \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x^{2025} \cdot S(x)} = \frac{1}{\ell} > 0,$$

de unde, în baza criteriului de comparaţie cu limită,

$$\sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2025\alpha}},$$

adică este convergentă dacă $\alpha > \dfrac{1}{2025}$ şi divergentă în rest. 2p