

**Concursul Național Studențesc de Matematică
„Traian Lalescu”
Constanța, 8-10 Mai 2025**

BAREM

SECȚIUNEA E

Problema 1.

1 punct oficiu

Calcul $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\varphi(y)}{x^2 + \varphi^2(y)}$ 0.5p

Calcul $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x\varphi'(y)}{x^2 + \varphi^2(y)}$ 0.5p

Calcul $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2x\varphi(y)}{(x^2 + \varphi^2(y))^2}$ 1p

Calcul $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x \left[\frac{\varphi''(y)(x^2 + \varphi^2(y)) - 2\varphi(y)[\varphi'(y)]^2}{(x^2 + \varphi^2(y))^2} \right]$ 2p

Condiția $\Delta u = 0 \Rightarrow \varphi''(y)(x^2 + \varphi^2(y)) = 2\varphi(y)[(\varphi'(y))^2 - 1]$, $\forall x \neq 0, \forall y \in \mathbb{R}$ 1p

Obținere $\varphi(y) = \pm y + b$ 3p

Cazul $b = 0 \Rightarrow f(z) = \pm i \cdot \operatorname{Ln} z + C$ 0.5p

Cazul $b \neq 0 \Rightarrow f(z) = -\operatorname{Arctg} \frac{z}{b} \pm \frac{i}{2} \cdot \operatorname{Ln}(z^2 + b^2) + D$ 0.5p

Problema 2.

1 punct oficiu

Schimbare de variabilă $t = x + 2$ 1p

Obținerea prin paritate a integralei $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)^{2025}} dt$ 1p

Pentru funcția $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^{2025}}$ se alege $z = i$ pol de ordin 20251p

Calcul $\text{Rez}(f, i) = \frac{(-i) \cdot 4048!}{(2024!)^2 \cdot 2^{4049}}$ 5p

Rezultat final $I = \frac{\pi \cdot 4048!}{(2024!)^2 \cdot 2^{4049}}$ 1p

Problema 3.

1 punct oficiu

Determinarea perioadei principale $T = 2\pi$ 1p

f pară rezultă $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 1p

$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos x} \cdot \cos nx \, dx$ 0.5p

$a_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left| \cos \frac{x}{2} \right| \cdot \cos nx \, dx$ 1p

Obținere $a_n = \frac{4\sqrt{2}(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}, n \geq 0$ 2.5p

Seria Fourier trigonometrică $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{4\sqrt{2}(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} \cos nx$ 1p

Deducerea sumei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{\pi-2}{4}$ 2p

Problema 4.

1 punct oficiu

Recunoașterea convoluției1p

Aplicarea transformării Laplace ecuației integro-diferențiale.....1p

Calcul $L(t^{-1/2})(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$ 1p

Obținerea $L[f(t)](s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{2}{\sqrt{s^3}} + \frac{2}{\sqrt{s^5}} \right)$ 2p

Calcul $L^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{s}} \right](t) = \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{\pi}}$ 1p

Calcul $L^{-1} \left[\frac{1}{s\sqrt{s}} \right](t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}$ 1p

Calcul $L^{-1} \left[\frac{1}{s^2\sqrt{s}} \right](t) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t\sqrt{t}$ 1p

Finalizare.....1p