



**Concursul Național Studențesc de Matematică  
„Traian Lalescu”  
Constanța, 8-10 Mai 2025**

**SECȚIUNEA A**

**Problema 1**

Găsiți funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  de clasă  $C^2$  care au proprietatea că există  $\alpha > 1$  astfel încât

$$f''(x)f(x) \geq \alpha(f'(x))^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Problema 2**

Determinați matricile  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  care satisfac relația

$$2025A^{2025} = A^{2024} + A^{2023} + \dots + A.$$

**Problema 3**

Fie  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă în 0 cu  $f(0) = 0$ . Determinați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{2^n}^{2^{n+1}} f\left(\frac{\ln x}{x}\right) dx$$

**Problema 4**

Fie  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1) Pentru orice matrice  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  există matricile  $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  astfel ca  $AX + YB = C$ ;
- 2) Pentru orice matrice  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  există matricile  $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  astfel ca  $A^2U + VB^2 = C$ .

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu punctaje cuprinse între 0 și 10.  
Timp de lucru: 4 ore.**