



Concursul Național Studențesc de Matematică „Traian Lalescu”

Constanța, 8-10 Mai 2025

SECȚIUNEA B

Problema 1

Fie A o matrice pătratică de ordinul n ale cărei elemente sunt fie a , fie b , unde a și b sunt două numere reale diferite, strict pozitive, astfel încât $\text{rang } A = 2$ și pe fiecare linie și coloană a matricei A se află cel puțin un a și cel puțin un b .

- Arătați că oricare două coloane ale lui A , care încep cu același element, sunt egale.
- Fie U și V două matrice pătratice cu elemente 0 sau 1 astfel încât $A = aU + bV$. Arătați că $\text{rang } U = \text{rang } V = 2$.

Problema 2

Fie (a_n) un șir de numere reale convergent la $l \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $a_n \neq l, \forall n \in \mathbb{N}$.

- Presupunem că șirul (a_n) este monoton. Studiați limita șirului $([a_n])$ și arătați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n}$ converge, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n a_n]}{n}$ diverge.
- Studiați limita șirului $([a_n])$ și natura seriilor de la punctul a) în cazul general (în care șirul poate fi nemonoton).

(Notă: Prin $[x]$ notăm partea întreagă a numărului real x .)

Problema 3

Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 = B^2 = I_n$ și $AB + BA = -2(A + B + I_n)$.

Demonstrați că:

- $AB = BA$;
- $\text{rang}(A + I_n) + \text{rang}(B + I_n) \leq n$.

Problema 4

Considerăm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție impară, de clasă C^{2025} , pentru care $f^{(2k+1)}(0) = 0$, pentru orice $k = 0, 1, \dots, 1011$, și $f^{(2025)}(0) > 0$.

- Arătați că există $\varepsilon > 0$ astfel încât seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n^{f(x)}} \right)$$

converge pentru orice $x \in (0, \varepsilon)$.

- Pentru fiecare $x \in (0, \varepsilon)$, notăm suma seriei precedente cu $S(x)$ și $g(x) = \frac{1}{S(x)}$. Studiați convergența seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

unde $\alpha > 0$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu punctaje cuprinse între 0 și 10.

Timp de lucru: 4 ore.