



Concursul Național Studențesc de Matematică „Traian Lalescu”

Constanța, 8-10 Mai 2025

SECȚIUNEA C

Problema 1

Fie $k \in \{0, 1, 2, \dots, 12\}$ și $n \in \mathbb{N}$. Se consideră funcțiile $f_{k,n}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_{k,n}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^k y^{12-k}}{(x^2 + y^2)^n}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

și $g_n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x, y) = (x^2 + y^2)^n$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Stabiliți pentru ce $k \in \{0, 1, 2, \dots, 12\}$, funcția $f_{k,1}$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$. Stabiliți dacă funcția $f_{6,6}$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

b) Determinați punctele de extrem ale funcției $f_{6,0}$ cu legătura $g_1(x, y) = 2$.

c) Determinați valoarea numărului real $I_k = \int_0^1 f_{k,1}(x, 1-x) \cdot g_1^2(x, 1-x) dx$.

Problema 2

Fie $n \in \mathbb{N}$ cu $n > 1$. Se consideră funcția $f(x, y) = x^n \cdot y^n - ny + y - 1$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Să se arate că ecuația $f(x, y) = 0$ definește implicit o unică funcție $y = y(x)$ în vecinătatea punctului $(x, y) = (\sqrt[n]{n}, 1)$ și determinați $y'(\sqrt[n]{n})$.

b) Scrieți polinomul Taylor de grad 2 pentru funcția $y = y(x)$ în jurul punctului $x = \sqrt[n]{n}$, în cazul particular $n = 2$.

c) Studiați natura seriei

$$\sum_{n=2}^{\infty} (y'(\sqrt[n]{n}))^{2n}$$

Problema 3

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $T: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definit prin $T(X) = X \cdot A + A^t \cdot X$, pentru orice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Demonstrați că T este operator liniar.

b) Determinați $\ker(T)$ și $\text{Im}(T)$. Verificați dacă $\ker(T) + \text{Im}(T) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Determinați o bază ortonormată în $\text{Im}(T)$, considerând $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ca spațiu euclidian înzestrat cu produsul scalar $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A \cdot B^t)$, unde $\text{Tr}(C)$ reprezintă urma matricei C .

Problema 4

Fie sfera $S: (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 10$ și fasciculul de plane

$$\pi_{\alpha,\beta}: \alpha x - (3\alpha + 2\beta)y + \beta z + \alpha + \beta = 0, \text{ unde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

a) Determinați ecuațiile parametrice ale dreptei comune d a planelor $\pi_{\alpha,\beta}$ și studiați poziția dreptei d față de sfera S .

b) Determinați ecuațiile planelor perpendiculare pe d tangente la sfera S .

c) Determinați ecuația planului din fascicul care intersectează sfera S după un cerc de rază maximă.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu punctaje cuprinse între 0 și 10.

Timp de lucru: 4 ore.