MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
FUNDAȚIA TRAIAN LALESCU DE LA MATEMATICĂ... SPRE LUME

Concursul Național Studențesc de Matematică „Traian Lalescu”

Constanța, 8-10 Mai 2025

SECȚIUNEA D

Problema 1. Considerăm funcțiile olomorfe pe $\mathbb{C}$, $f_1 = u_1 + iv_1$, $f_2 = u_2 + iv_2$ astfel încât următoarele relații sunt satisfăcute pe $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} &u_1(x,y) \le v_2(x,y) \\ &u_2(x,y) - v_1(x,y) = 2\cos x \cdot \psi(y) \end{aligned}, \text{ unde } \psi \in C^2(\mathbb{R}).$$

a) Arătați că funcția $g = f_1 + i \cdot f_2$ este constantă.

b) Știind că $f_1(0) = 2025$ și $f_2(0) = 2025i$, determinați funcțiile f_1 și f_2.

Problema 2. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{\cos^2\theta - \cos^2\varphi}\, d\theta$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Problema 3. Fie $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ și $\hat{f}, \hat{g}$ transformatele Fourier ale funcțiilor f și g. Știind că $\hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$:

a) Să se arate că: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \cdot g(x)dx$.

b) Se consideră funcția $erf(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$; arătați că:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\left(x^2+4\right)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{32}\pi \cdot \left[erf\left(\sqrt{2}\right) - 1\right].$$

Problema 4. Fie $J_0(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$, $t \ge 0$.

a) Arătați că $L\left[J_0(t)\right](s) = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ folosind, eventual, seria binomială.

b) Calculați $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{J_0(t) - \cos^3 t}{t} dt.$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu punctaje cuprinse între 0 și 10.

Timp de lucru: 4 ore.