

**Concursul Național Studentesc de Matematică
„Traian Lalescu”
Constanța, 8-10 Mai 2025**

BAREM

SECȚIUNEA D

Problema 1

1p oficiu

- a) Mărginirea părții reale a funcției g 1p
Deducere $g = c_1 + ic_2 = ct$ 1p
b) Deducerea relațiilor: $u_1 - v_2 = c_1$, $u_2 + v_1 = c_2$ și obținerea $f_1 = -if_2$ 2p
Determinare $u_2 = \cos x \cdot (Ae^y + Be^{-y})$ folosind $u_2 = -v_1 = \cos x \cdot \psi(y)$ și
armonicitatea lui u_2 2p
Determinarea funcției $f_2(z) = (A+B)\cos z - i(A-B)\sin z + C + iD$, cu
 $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ 2p
Determinarea constantelor și finalizare: $f_2(z) = i[(B-A)\sin z + 2005]$ și respectiv
 $f_1(z) = if_2(z) = (B-A)\sin z + 2005$ 1p

Problema 2

1p oficiu

- Obținerea capetelor de integrare $-\pi, \pi$ prin folosirea parității funcției 1p
Schimbare de variabilă $e^{i\theta} = z$ și obținerea integralei complexe corespunzătoare pe
cercul unitate 2p
Obținerea pct. singulare (poli de ordinul 1) și poziția lor față de curba de integrare 2p
Calculul reziduurilor 3p
Obținerea rezultatului final: $\frac{\pi \sin(n\varphi) [1 + (-1)^n]}{\sin(2\varphi)}$ 1p

Problema 3

1p oficiu

a) Demonstrarea egalității cerute 2p

b) Alegerea lui $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ și calcularea $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ 2p

Alegerea lui $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{(\omega^2 + 4)^2}$ și calcularea, pentru $t > 0$ și $t < 0$, a funcției

$g(t) = \frac{1}{32} \cdot e^{-2|t|} (1 + 2|t|)$ 3p

Obținerea rezultatului final: $\frac{\sqrt{\pi}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{32} \pi \cdot [erf(\sqrt{2}) - 1]$ 2p

Problema 4

1p oficiu

a) Obținerea relației $L[J_0(t)](s) = \frac{1}{s} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)(2n-1) \dots (n+1)}{n!} \left(\frac{1}{s^2}\right)^n$ 2p

Folosirea dezvoltării binomiale $\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 2p

Obținerea formei cerute pentru $L[J_0(t)](s)$ 1p

b) Aplicarea relației $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty L[f(t)](s) ds$ 1p

Calcul și finalizare : $\int_0^\infty \frac{J_0(t) - \cos^3 t}{t} dt = \ln 2 + \frac{1}{4} \ln 3$ 3p