

Probleme - Matematici Speciale

Ecuatii cu derivate parțiale de ordinul al II-lea

1. Aduceți la forma canonică ecuațiile: a) $2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 7 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

2. Determinați forma canonică a ecuației $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ și apoi integrați această ecuație.

3. Determinați forma canonică a ecuației $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 21 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ și apoi integrați această ecuație.

5. Să se integreze ecuația cu derivate parțiale de ordinul al II-lea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ știind că:}$$

$$u(1, y) = 1 - \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 2y.$$

Transformata Fourier

1) Să se rezolve ecuația integrală:

$$\int_0^{\infty} g(u) \cdot \cos ut \, du = \varphi(t), \quad \text{unde } \varphi(t) = \begin{cases} 1-t, & t \in (0,1] \\ 0, & t \in (1, \infty) \end{cases}.$$

2) Să se determine funcția $f(t)$ care satisface ecuația integrală:

$$\int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos ut \, du = \frac{1}{u^2 + a^2}, \quad u \geq 0, \quad a > 0.$$

3) Reprezentați printr-o integrală Fourier funcția:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq a, \\ t + a, & t \in (-a, 0), \\ -t + a, & t \in [0, a). \end{cases}$$

Transformata Laplace:

1) Arătați că:

$$\text{a) } \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \quad \text{b) } \mathcal{L}\{e^{3t}\} = \frac{1}{p-3}; \quad \text{c) } \mathcal{L}\{ch \omega t\} = \frac{p}{p^2 - \omega^2}$$

$$\text{d) } \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{\alpha + p}; \quad \text{e) } \mathcal{L}\{e^{at} \cdot \cos bt\} = \frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2};$$

$$\text{f) } \mathcal{L}\{(t+1) \cdot e^{2t}\} = \frac{p-1}{(p-2)^2}; \quad \text{g) } \mathcal{L}\{t^4 \cdot e^t\} = \frac{24}{(p-1)^5};$$

2) Să se calculeze transformatele Laplace sau imaginile funcțiilor:

$$\text{a) } f(t) = e^{2t}; \quad \text{b) } f(t) = \cos \omega t;$$

$$\text{c) } f(t) = e^{at} \cdot \sin bt; \quad \text{d) } f(t) = sh \omega t.$$

3) Determinați imaginea $F(p)$ a funcției original: $f(t) = \int_0^t e^{3x} \cdot \cos \omega x \, dx$.

4) Să se afle imaginile funcțiilor: a) $f(t) = e^t \sin 2t + e^{-t} \cos 4t$,

$$\text{b) } g(t) = e^t \cos 2t + e^{-t} \sin 4t.$$

Formula lui Heavyside

1) Să se determine funcția original corespunzătoare funcției imagine:

$$F(p) = \frac{p + \alpha}{p(p^2 + a^2)}, \quad a > 0;$$

2) Să se determine funcția original corespunzătoare funcției imagine:

$$F(p) = \frac{p^2 + 2p + 3}{(p+2)^2(p+3)};$$

3) Utilizând calculul operațional, integrați ecuația următoare cu condițiile inițiale precizate:

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t} \text{ cu condițiile: } y(0) = -3 \\ y'(0) = 5$$

4) Să se determine soluția ecuației diferențiale $x''(t) + a^2 x(t) = (a^2 + \alpha^2) \cdot e^{-\alpha t}$

care satisface condițiile inițiale: $x(0) = 1$

$$x'(0) = a - \alpha.$$

5) Să se determine soluția ecuației diferențiale $x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = e^t$

care satisface condițiile inițiale: $x(0) = -1$

$$x'(0) = 1.$$

Funcțiile Gamma si Beta

1) Să se calculeze integralele următoare folosind funcțiile speciale:

$$\text{a) } I = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^6)^3} dx; \quad \text{b) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cdot \cos^4 x dx; \quad \text{c) } I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^8}.$$