

Probleme propuse pentru examenul de ANALIZA MATEMATICA 1

1. Mulțimi și funcții

- 1) a) Să se arate că mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{2, 4, 8, 16, 32\}$ sunt echipotente;
b) Să se arate că intervalul $(0, 1)$ este o mulțime echipotentă cu intervalul $(1, \infty)$
- 2) Mulțimea Z a numerelor întregi, este numărabilă
- 3) Fie numerele reale $a < b$, $c < d$. Să se arate că $[a, b] \sim [c, d]$, $(a, b) \sim (c, d)$, $[a, b) \sim [c, d)$, $(a, \infty) \sim (c, \infty)$, $[a, \infty) \sim [c, \infty)$, $(-\infty, a) \sim (-\infty, c)$
- 4) Intervalul $(0, 1)$ nu este o mulțime numărabilă.
- 5) $\mathbb{R}$ este nenumărabilă (are puterea continuului).
- 6) Mulțimea numerelor raționale este numărabilă.
- 7) Orice interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ este o mulțime nenumărabilă.
- 8) Mulțimea numerelor iraționale este nenumărabilă.

2. Șiruri de numere reale

- 1) Folosind criteriul general al lui Cauchy pentru șiruri, să se studieze convergența șirurilor:

a) $a_n = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{2^3} + \dots + \frac{\cos nx}{2^n}, x \in \mathbb{R}$

b) $b_n = \frac{x}{1} + \frac{x+1}{3} + \frac{x+2}{5} + \dots + \frac{x+n}{2n+1}, x > 1.$

- 2) Utilizând criteriul lui Cauchy, să se studieze convergența șirurilor:

a) $a_n = \frac{\sin 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\sin n!}{n \cdot (n+1)}, n \geq 1;$

b) $b_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}, n \geq 1;$

c) $c_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}, n \geq 1.$

3. Serii numerice. Serii de puteri

- 1) Să se studieze convergența următoarelor serii și, în cazul convergenței, să se stabilească suma lor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)};$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2-1}};$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right);$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}};$

2) Folosind condiții necesare și suficiente de convergență, să se studieze convergența următoarelor serii:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right); \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \geq 2.$$

3) Utilizând criteriile de convergență pentru seriile cu termeni pozitivi, să se stabilească natura seriilor:

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n(n^2+1)}}; & b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+n+1}; & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{n}; \\ d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}; & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}; & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}; \\ g) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n; & h) \sum_{n=1}^{\infty} n a^n, a > 0; & i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}; \\ j) \sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}, a > 0; & k) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}} & l) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2}. \end{array}$$

4) Studiați convergența următoarelor serii alternante:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}.$$

5) Să se studieze convergența următoarelor serii și să se determine suma lor (în cazul în care sunt convergente):

$$\begin{array}{ll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}; & b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}; \\ c) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right); & d) \sum_{n=1}^{\infty} n a^n, a \in (0,1). \end{array}$$

6) Utilizând criteriul general al lui Cauchy, să se precizeze natura seriilor:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{5^n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n+2}.$$

7) Folosind condiția necesară de convergență, să se arate că următoarele serii sunt divergente:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+b^n}, a > b > 0; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^n; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^2+1}.$$

8) Studiați convergența următoarelor serii cu termeni pozitivi:

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{n^2}; & b) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cos \frac{a}{5^n}; & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+3}; \\ d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n + n}, a \geq 0; & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^2}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}, a > 0; & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}; \\ g) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}; & h) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}; & i) \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(\frac{3n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 5n + 1} \right)^n; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}, a > 0; & \text{k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{1}{2n+1}; & \text{l)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+1}}. \\ \text{m)} \sum_{n \geq 1} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^2}; & \text{n)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right); & \text{o)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n^2 \sqrt{n+1}}. \end{array}$$

9) Să se stabilească natura seriilor alternate:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \cdot 3^n}; \\ \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{5^n} & \text{d)} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1}. \end{array}$$

10) Să se arate că seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{C_n^k}{k}$ este divergentă.

11) Să se determine mulțimea de convergență și suma următoarelor serii de puteri:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}; \quad \text{b)} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n, \alpha \in \mathbb{R}.$$

12) Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}; & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1)} x^n \\ \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \left(\sin^{2n} \frac{\pi}{4} \right) x^n & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2}{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2} x^n. \end{array}$$

13) Să se determine mulțimea de convergență și suma următoarelor serii de puteri:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; & \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 x^n; \\ \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3) x^n; & \text{d)} \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n; \\ \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}; & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}. \end{array}$$

14) Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n; & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n!} x^n; \\ \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} \right)^n; & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} x^n; \\ \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n; & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2+n} x^n; \\ \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n; & \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \cdot \dots \cdot (a+n)}{b(b+1) \cdot \dots \cdot (b+n)} x^n, 0 < a < b; \\ \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n, a > 0; & \text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} x^n. \end{array}$$

4. Limite de funcții

1) Să se studieze existența următoarelor limite :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{(x,y) \rightarrow (e,e^2)} (1 + \ln xy); & \text{b)} \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \frac{\pi}{2})} \left(1 + \frac{\sin y}{x}\right)^x; \\ \text{c)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}; & \text{d)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}; \\ \text{e)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\arctg xy}{x}; & \text{f)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \end{array}$$

2) Cercetați existența limitelor iterate și a limitei globale în origine pentru funcțiile :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, x, y \neq 0; & \text{b)} f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2 y^2 + (x-y)^4}, x, y \neq 0; \\ \text{c)} f(x,y) = \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}, x+y \neq 0; & \text{d)} f(x,y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, x, y \neq 0. \end{array}$$

3) Să se calculeze :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y) \sin(x^2 + y^2)}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} & \text{b)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \\ \text{c)} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \left(1 + \frac{x-1}{y}\right)^{\frac{x+y}{(x-1)^3}} & \text{d)} \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2 + y^2}. \\ \text{e)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{tg}(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{f)} \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{4 - \sqrt{16 - x - y - z}}{\arcsin(x+y+z)}. \end{array}$$

4) Să se demonstreze că următoarele funcții nu au limită în origine :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} & \text{b)} f(x,y) = \frac{2x^2 y}{x^3 + y^3}. \end{array}$$

5) Să se studieze existența limitelor iterate și a limitei globale în origine pentru funcțiile de mai jos

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & \text{b)} f(x,y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x+y} \end{array}$$

5. Funcții continue

1) Să se studieze continuitatea în origine a următoarelor funcții :

$$\text{a)} f(x,y) = \begin{cases} (1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, x,y > 0 \\ 1, x=0 \text{ sau } y=0 \end{cases} \quad \text{b)} f(x,y) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2) Să se studieze continuitatea uniformă a următoarelor funcții :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = \ln x, x \in \left[\frac{1}{e}, e\right] & \text{b)} f(x) = \ln x, x \in (0, e] \end{array}$$

$$c) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, x \in (1, \infty) \quad d) f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}, x \in (0, \infty).$$

$$3) \text{ Să se arate că funcția } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy + x^2y \ln(x+y)}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

este continuă parțial în origine în raport cu fiecare dintre variabile dar nu este continuă (în raport cu ambele variabile).

4) Să se studieze uniform continuitatea următoarelor funcții :

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|, x \in [0, 1] & b) f(x) = \frac{x}{3+x} + 2x, x \in (0, \infty) \\ c) f(x) = \frac{x}{3+x} + 2x, x \in (-3, \infty) & d) f(x) = x \sin^2 x^2, x \in \mathbb{R}. \\ e) f(x) = \sin x^2, x \in \mathbb{R} & f) f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}, x \in [0, 1]. \end{array}$$

5) Să se studieze continuitatea următoarelor funcții :

$$\begin{array}{ll} a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\ln(x^2 + y^2)}, x^2 + y^2 < 1, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ b) f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2}, (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases} \\ c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - e^{y^2}}{x - y}, x \neq y \\ 2xe^{x^2}, x = y \end{cases} \\ d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x - \sin y}{x - y}, x \neq y; \\ \cos x, x = y \end{cases} \\ e) f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{x^4 + y^4 + z^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}}, x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \\ 0, x^2 + y^2 + z^2 = 0 \end{cases} \end{array}$$

6) Discutați în funcție de valorile parametrului $\alpha > 0$ continuitatea următoarelor funcții :

$$\begin{array}{ll} a) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha y}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \\ b) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^{2+\alpha} y^2)}{x^4 + y^4}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$$

7) Care dintre următoarele funcții se poate prelungi prin continuitate ?

a) $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^2}$;

b) $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$.

8) Să se arate că funcția $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0, (x, y) = (0,0) \end{cases}$

este continuă parțial în origine în raport cu fiecare dintre variabile dar nu este continuă (în raport cu ambele variabile).

6. Teoria diferențială a funcțiilor

1) Să se arate că funcția $f(x) = \frac{1}{1+x+\ln x}$ verifică egalitatea $x \cdot f'(x) = f(x)(f(x) \cdot \ln x - 1)$.

2) Să se calculeze derivatele de ordin n ($n \in \mathbb{N}^*$) în cazul următoarelor funcții :

a) $f(x) = \ln(ax+b), a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$; b) $f(x) = (x-1)e^{-x}$;

c) $f(x) = \sin^2 ax, a \in \mathbb{R}^*$ d) $f(x) = x^2 \cos x$.

3) Pornind de la definiție, să se calculeze :

a) $f'_x(1,0)$ și $f'_y(1,0)$, dacă $f(x, y) = x \ln(x-y^2), x > y^2$;

b) $f''_{x^2}(0,2), f''_{xy}(0,2)$ și $f''_{y^2}(0,2)$, dacă $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}, x, y \in \mathbb{R}^*$;

$f'''_{xyz}(4,1,2)$, dacă $f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}, x > 0, z \neq 0$.

4) Demonstrați că funcția $f(x, y) = xy + xe^{\frac{y}{x}}$ verifică egalitatea

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xy + f(x, y)$$

5) Arătați că :

a) $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \left(\arctg \frac{y}{x} - a^{xy} \right) \cdot \varphi \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} \right)$ verifică ecuația:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy a^{xy} \varphi \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} \right) \ln a, a > 0, a \neq 1;$$

b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \varphi(xy, x^2+y^2-z^2)$ verifică ecuația:

$$xz \frac{\partial f}{\partial x} - yz \frac{\partial f}{\partial y} + (x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

6) Calculați diferențiala funcției $f(x) = \varphi(x \ln x, 3x^2), x > 0$.

7) Calculați diferențialele următoarelor funcții :

a) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; b) $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{x y}{z^2}$.

8) Fie funcția $f : R^3 \rightarrow R$, $f(x, y, z) = e^{a x + b y + c z}$. Să se determine $d^n f$.

9) Arătați că funcția $f : R^2 \rightarrow R$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2 x y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, are derivate parțiale în origine

cu toate că nu este continuă în acest punct.

10) Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul al doilea pentru următoarele funcții :

a) $f(x, y) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$; b) $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$
c) $f(x, y) = e^{\sin x y}$; d) $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$
e) $f(x, y, z) = x^3 y^2 z + 2x - 3y + z + 5$; f) $f(x, y, z) = (x y)^z$
g) $f(x, y, z) = \frac{x y z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; h) $f(x, y, z) = x^y + y^z - 2 z^x$.

11) Demonstrați că :

a) $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$, pentru $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$;
b) $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4}{y^2} \cdot z$, pentru $z = \frac{y^4}{x^2 - y^2}$;
c) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$, pentru $u = x + \frac{x - y}{y - z}$.
d) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, pentru $u = \frac{a z + b y + c x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, a, b, c \in R$.

12) Calculați :

a) $df(1, 1)$, dacă $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$; b) $df(3, 4, 5)$, dacă $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

13) Calculați diferențialele de ordinul întâi ale următoarelor funcții:

a) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$ b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$
c) $f(x, y, z) = \cos(x - 2y + z)$ d) $f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^2 + z^4)$.

7. Aplicații ale calculului diferențial

1) Să se determine punctele de extrem local în cazul următoarelor funcții:

a) $f : R \rightarrow R$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ b) $f : R - \{-2, 0, 2\} \rightarrow R$, $f(x) = \frac{16}{x(4 - x^2)}$
c) $f : R - \{-2, 2\} \rightarrow R$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$ d) $f : R \rightarrow R$, $f(x) = x^2 e^{-x}$.

2) Să se determine punctele de extrem pentru următoarele funcții reale de mai multe variabile reale :

a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, x, y \in \mathbb{R};$

b) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, x, y, z > 0;$

c) $f(x, y) = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, x, y > 0;$

d) $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z), x, y, z \in (0, \pi).$

3) Să se determine punctele de extrem ale următoarelor funcții :

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5;$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 8}}$

c) $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \ln(1 + x);$

d) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x}$

e) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y;$

f) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}};$

g) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2;$

h) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-(x^2 + y^2)};$

i) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z;$

j) $f: (\mathbb{R} - \{0\})^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{16};$

k) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \sum_{k=1}^n [(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2 + (z - c_k)^2], \text{ unde } a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n}.$

8. Derivate și diferențiale ale funcțiilor compuse.

1) Fiind dată funcția $\varphi(x) = f(x + \ln x, 1 + x^3), x > 0$, să se calculeze $\varphi'(x)$ și $d\varphi(x)$.

2) Să se calculeze $d\varphi$, știind că $\varphi(x, y) = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

3) Calculați $d^2 \varphi$ în cazul funcției $\varphi(x, y) = f\left(\frac{x}{y}, xy\right), (x, y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 0$.

4) Să se arate că funcția $\varphi(x, y) = y \cdot f(x^2 - y^2)$ este soluție a ecuației $\frac{1}{x} \cdot \varphi'_x + \frac{1}{y} \cdot \varphi'_y = \frac{1}{y^2} \cdot \varphi$.

5) Determinați derivatele următoarelor funcții de o variabilă reală:

a) $\varphi(x) = f(u(x), v(x), w(x))$, unde $f(u, v, w) = u + vw, u(x) = \operatorname{ctg} x, v(x) = x^3 + 3x$, și $w(x) = \ln(x^2 + 3)$;

b) $\varphi(x) = f(u(x), v(x))$, unde f este o funcție diferențiabilă iar $u(x) = e^{x^2}$ și $v(x) = x^2 - 1$;

c) $u(t) = \ln \left(\sin \frac{x}{\sqrt{y}} \right)$, unde $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$.

6) Calculați $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$ dacă $z = f(u)$ și $u(x, y) = xy + \frac{y}{x}$.

7) Să se calculeze derivatele parțiale de primul ordin ale funcției $\varphi(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ dacă $f(u, v) = \arctg \frac{u}{v}$, $u = x \sin y$, $v = x \cos y$.

8) Să se arate că funcția $z = e^y \cdot \varphi \left(y e^{\frac{x^2}{2y^2}} \right)$ verifică ecuația :

$$(x^2 - y^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

NOTA

Urmatoarele probleme reprezinta cerinte minimale pentru obtinerea notei 5:

- cap. 1 – ex. 1, 2, 5, 8
- cap. 2 ex. 1
- cap. 3 – ex. 1, 2, 3, 4, 11, 12
- cap. 4 – ex. 1, 3, 4
- cap. 5 – ex. 1, 3, 7
- cap. 6 – ex. 1, 2, 3, 4, 7, 10, 12, 13
- cap. 7 – ex. 2
- cap. 8 – ex. 1. 4