ANALIZA MATEMATICA 2

Probleme propuse pentru examen

1. Integrale nedefinite si integrale definite: tehnici fundamentale de integrare

1) Să se calculeze următoarele integrale folosind metoda integrării prin părţi $\left(x \in I \subset D_f\right)$:

a) $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$; b) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$;

c) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; d) $\int x\cos 3x\,dx$;

e) $\int e^{ax}\sin bx\,dx,\ a,b \in R^*$; f) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a \in R^*$.

2) Să se calculeze următoarele integrale folosind metoda substituţiei (schimbării de variabilă) :

a) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^8}}\,dx$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}}$;

c) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+9}\,dx$; d) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$;

e) $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}\,dx$; f) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x}\,dx$;

g) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$; h) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$.

3) Să se calculeze următoarele integrale de funcţii raţionale şi reductibile la funcţii raţionale :

a) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2}$ b) $\int \frac{x^4+2}{x^3-2x^2}\,dx$ c) $\int \frac{dx}{x^4-8x^2-8x+15}$

d) $\int \frac{x+1}{\left(x^2+4x+5\right)^2}\,dx$ e) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ f) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$ g) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

4) Folosind metoda integrării prin părţi, să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int \ln x\,dx$; b) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$;

c) $\int x\ln^2 x\,dx$; d) $\int \left(x^2+x\right)\ln(x+1)\,dx$;

e) $\int x^2 e^{-x}\,dx$; f) $\int 3^x \cos x\,dx$;

g) $\int x \arcsin x\,dx$; h) $\int \sin(\ln x)\,dx$;

i) $\int \left(x^2+5x+6\right)\cos 2x\,dx$; j) $\int x\sin x\cos 3x\,dx$;

k) $\int \frac{x\ln(1+x)}{(1+x)^2}\,dx$; l) $\int \frac{x\,arctg x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;

5) Folosind schimbări de variabile adecvate, calculaţi integralele :

a) $\int \sqrt[3]{x^3-4x+1}\,(3x^2-4)\,dx$; b) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

c) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$; d) $\int \frac{x\,dx}{\ln x^{x^2}}$;

e) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$; f) $\int \frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}\,dx$;

g) $\int e^{2x^2+\ln x}dx$; h) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+3}\,dx$;

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+7}}$; j) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+x-3}}$;

k) $\int \frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; l) $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$;

m) $\int \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}\,dx$; n) $\int \frac{dx}{\sin^2(5x-2)}$;

o) $\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\,dx$; p) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+a^4}}\,dx$;

r) $\int \frac{dx}{e^{ax}+e^{-ax}}$; s) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$

6) Să se calculeze următoarele integrale de funcţii raţionale:

a) $\int \frac{2x+11}{x^2+6x+13}\,dx$; b) $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,dx$;

c) $\int \frac{x^6+16}{x^4-4}\,dx$; d) $\int \frac{x^3}{x^2-3x+2}\,dx$;

e) $\int \frac{x\,dx}{x^3-6x^2+11x-6}$; f) $\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$;

g) $\int \frac{x^6-x^2-x}{1-x^4}dx$; h) $\int \frac{dx}{x^3+2x-3}$; i) $\int \frac{x^5+1}{x^6+x^4}dx$;

7) Să se calculeze următoarele integrale reductibile la integrale de funcţii raţionale:

a) $\int x^2(1-\sqrt[3]{x})\,dx$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$;

c) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$; d) $\int \sqrt{1-\sqrt{x}}\,dx$;

e) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$; f) $\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$;

g) $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$; h) $\int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+x+1}}$;

i) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$; j) $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx$;

k) $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$; l) $\int \frac{dx}{(e^x-e^{-x})^2}$;

m) $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$; n) $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$;

8) Să se calculeze următoarele integrale definite :

$a)\ I_1=\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx$; $b)\ I_2=\int_{-1}^{0}\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx$;

$c)\ I_3=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx$; $d)\ I_4=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

$e)\ I_5=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{x\,dx}{\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$; $f)\ I_6=\int_{-2}^{2}\frac{x^4}{e^x+1}\,dx$;

9) Să se calculeze următoarele integrale definite:

a) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} x\arcsin\left(x^2-4\right)dx$ b) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x\left(1+\sqrt{\ln x}\right)^3}dx$

c) $\int_{-1}^{0}\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}dx$ d) $\int_0^1 \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2\left(x^2+1\right)}}dx$

e) $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a^2+b^2-2ab\cos x}$ f) $\int_0^{\pi/4}\ln(1+tgx)dx$

g) $\int_0^{\pi} e^x\sin^2 x\,dx$ h) $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$

i) $\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$ j) $\int_0^{\pi/2}\left|\sin x-\cos x\right|dx$ k) $\int_0^4\frac{x^2\,dx}{(x+2)(x+4)^2}$

2. Integrale improprii si integrale cu parametru

1) **S**ă se cerceteze convergenţa integralelor :

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$; b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x}\,dx$;

c) $\int_{-1}^{-1/3}\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$; d) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha},\ \alpha>0$.

2) Să se studieze convergenţa următoarelor integrale improprii :

a) $\int_1^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$; b) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2\left(x^2+1\right)}$;

c) $\int_0^\infty \frac{arctg\,x}{x}\,dx$; d) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+5x^2}$.

3) Să se calculeze următoarele integrale cu parametru :

a) $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx,\ \alpha,\beta>0$ b) $\int_0^1 \frac{\ln\left(1-\alpha^2x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx, \alpha\in(-1,1)$

c) $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\cdot\sin(\ln x)\,dx,\ a,b>0$ d) $\int_b^c \frac{e^{-ax}}{x}(\sin bx-\sin cx)dx, a>0, b,c\in R$.

4) Să se cerceteze convergenţa următoarelor integrale:

a) $\int_a^\infty e^{-\lambda x}dx, \lambda > 0;$ b) $\int_0^\infty e^{-x^2}dx;$

c) $\int_0^\infty \frac{arctgx}{1+x^2}dx;$ d) $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}dx;$

e) $\int_1^\infty x\cos x^2 dx;$ f) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx;$

g) $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x};$ h) $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos\beta x dx;$

i) $\int_0^\infty \frac{arctgx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx;$ **j)** $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2};$

5) Să se cerceteze convergenţa integralelor improprii de speţa a II-a:

a) $\int_1^3 (x-1)^{-3/2}dx;$ b) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

c) $\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx, a < b;$ d) $\int_a^c \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx, a < c < b;$

e) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}};$ f) $\int_0^1 \ln x dx$;

g) $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x};$ h) $\int_0^\pi \frac{\cos 3x}{2+\cos x}dx;$

6) Să se calculeze:

a) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x};$ b) $\int_{\pi/3}^\pi \frac{\cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x}dx;$

7) Să se calculeze integralele cu parametru:

a) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx, a > 0, b > 0;$ b) $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\right)\frac{dx}{\sin x}, 0 < b < a;$

c) $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1-t\cos x}{1+t\cos x}\right)\frac{dx}{\cos x}, |t| < 1;$ d) $\int_0^{\pi/2} \frac{arctg(t\cdot tgx)}{tgx}dx, |t| < 1;$

e) $\int_0^\pi \ln\left(1-2t\cos x + t^2\right)dx, |t| < 1;$ **f)** $\int_0^\infty \frac{arctg(tx)}{x(1+x^2)}dx;$ **g)** $\int_0^{\pi/2} \frac{arctg(\alpha\sin x)}{\sin x}dx;$

3. Integrale curbilinii

1) Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speţa întâi :

a) $\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, unde C este segmentul de dreapta ce leagă punctele O(0,0) şi A(1, 2) ;

b) $\int_C y^2\, ds$, unde C este arcul de cicloidă definit parametric prin $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

c) $\int_C \sqrt{2y^2 + z^2}\, ds$, unde C este cercul determinat ca intersecţie între sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ şi planul x = y;

d) $\int_C x\, ds$, unde $C = \{(x, y) \in R^2 / |x| + |y| = 1\}$;

e) $\int_C (x + y)\, ds$, unde $C = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + 4y^2 = 1\}$.

2) Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speţa a doua :

a) $\int_C (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, unde C este arcul de parabolă $y = x^2, x \in [1,2]$;

b) $\int_C \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$, unde C este cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 = a^2$, parcurs în sens trigonometric.

c) $\int_C (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz$, unde C este o spiră a elicei de ecuaţii parametrice:

$$(E)\ \begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \sin t, \quad a, b >, \ t \in [0, 2\pi]; \\ z(t) = b\, t \end{cases}$$

3) Să se calculeze integralele curbilinii de speţa a doua de mai jos, demonstrând în prealabil că sunt independente de drum :

a) $\int_{AB} (x + y)(dx + dy)$, unde A(0,0) şi B(1,1) ;

b) $\int_{AB} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$, unde A(1,1,0) şi B(2,3,1);

4) Să se calculeze integralele curbilinii de speţa întâi:

a) $I = \int_C (x + y)ds$, C: arcul cercului de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 = r^2, y = x$, situat în primul octant şi parcurs în sensul crescător al lui z.

b) $I = \int_C x\, y\, z ds$, C: arcul cercului de ecuaţii $x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x^2 + y^2 = \frac{r^2}{4}$, situat în primul octant şi parcurs în sensul crescător al lui y.

c) $I = \int_C y e^{-x} ds$, C este curba definită parametric de ecuaţiile $x = \ln(1 + t^2), y = 2arctgt - t,$ $t \in [0,1]$.

d) $I = \int_C xy ds$, unde C este arcul din primul cadran al elipsei de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

e) $I = \int_C x^2 y^2 ds$, unde C este definită parametric de ecuaţiile $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in [0, 2\pi]$

f) $I=\int_C z\,(x^2+y^2)ds$, unde C este definită parametric de ecuaţiile $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t,$ $t\in[0,1]$.

5) Să se calculeze integralele curbilinii de speţa a II a:

a) $\int_C 3xydx-y^2dy$, $C=\{(x,y)\,|\,y=2x^2, x\in[0,2]\}$;

b) $\int_{C_i} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, $C_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=a^2\}$, $C_2=\left\{(x,y)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$,
$C_3=\{(x,y)\,|\,x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}\}$, $C_4=\overline{ABCD}$ (linie poligonală), unde A(1,0), B(1,1), C(-1,1), D(-1,0) sau A(-1,0), B(1,-1), C(-1,-1), D(-1,0);

c) $\int_C (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4x\}$;

d) $\int_{C_i} (y^2+2xz)dx+2y(x+z)dy+(x^2+y^2)dz$,
$C_1=\{(x,y,z)\,|\,x=a\cos t, y=b\sin t, z=ct, t\in[0,2\pi]\}$, $C_2=\overline{AB}$, A(a,0,0), B(2a,b,c);

e) $\int_{C_-} (2a-y)dx+xdy$, $C_-=\{(x,y)\,|\,x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), t\in[0,2\pi]\}$;

f) $\int_{C^+} \frac{dx}{y}-\sqrt{2x}dy$, $C^+=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2-2x=0, y\geq 0\}$;

g) $\int_C \frac{dy}{x+3}$, C este arcul elipsei $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ între A(3,0), B(0,2);

h) $\int_C (y+z)dx+(x+z)dy-(x+y)dz$,
$C=\{(x,y,z)\,|\,x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t), z=t, t\in[0,2\pi]\}$;

i) $\int_C (3x^2+6y)dx-14yz\,dy+20xz^2\,dz$, unde :
$C=\{(x,y,z)\,|\,x=t, y=t^2, z=t^2, t\in[0,1]\}$;

6) Să se arate că integralele curbilinii de mai jos sunt independente de drum şi apoi să se calculeze:

a) $I=\int_{AB} \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\frac{e^y}{1+x^2}dy$;

b) $I=\int_{AB} \left(e^{-y}+3x^2y^2\right)dx+\left(2x^3y-xe^{-y}\right)dy$;

c) $I=\int_{AB} \left(10x^4-2xy^3\right)dx-3x^2y^2dy$;

d) $I=\int_{AB} (yz-2)dx+(3+xz)dy+(1+xy)dz$;

4. Integrale duble

1) Să se calculeze următoarele integrale duble :

a) $\iint_D xy\,dxdy$, domeniul D fiind limitat de parabola $y = x^2$ şi dreapta $y = 2x + 3$;

b) $\iint_D \sqrt{xy - y^2}\,dxdy$, unde D este suprafaţa triunghiulară OAB de vârfuri O(0,0), A(10, 1) şi B(1,1) ;

c) $\iint_D (1 - y)dxdy$, unde $D: x^2 + y^2 \le 2y, y \le x^2, x \ge 0.$

d) $\iint_D xy^2\,dxdy$, unde $D: x^2 + y^2 \le R^2,\ y \ge 0$;

2) Cu ajutorul unor schimbări de variabile adecvate, să se calculeze următoarele integrale duble :

a) $\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$, unde $D: x^2 + y^2 \le a^2$;

b) $\iint_D (x + y)dxdy$, unde $D: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$;

3) Folosind formula lui Green, să se calculeze următoarele integrale curbilinii :

a) $\int_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, unde C este perimetrul triunghiului ABC de vârfuri A(1, 1), B(2, 2) şi C(1,3) ;

b) $\int_C (x - y)dx + dy$, unde C este frontiera domeniului $D: x^2 + y^2 \le 2x,\ y \ge 0$.

4) Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\iint_D \dfrac{x^2}{1+y^2}\,dxdy,$ unde D este un dreptunghi de laturi x = 0, y = 0; x =1, y =1.

b) $\iint_D \dfrac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy,$ unde D este un dreptunghi de laturi x = 0, y = 0; x=1, y =1.

c) $\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2}\,dx\,dy,$ unde D este domeniul limitat de y = x, y = 0, y = 1.

d) $\iint_D \dfrac{x^2}{y^2}\,dx\ dy,$ unde D este domeniul limitat de curbele $y = x,\ y = \dfrac{1}{x},\ x \in [1,2].$

e) $\iint_D \dfrac{2x}{\sqrt{1+y^2-x^4}}\,dx\quad dy,$ unde D este domeniul limitat de curbele: y = x, y =0, y= 1.

5) Utilizând formula lui Green, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, pe curbele C închise, parcurse în sens direct:

a) $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy,$ unde C este conturul dreptunghiului $D = [1,4]\times[0,2]$;

b) $\int_C e^{x^2+y^2}(-y\,dx + x\,dy)$, unde C este cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1$;

c) $\int_C (xy-y)\,dx+(xy+x)\,dy$, unde C este frontiera domeniului plan $D=\left\{(x,y)\left|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right.\right\}$;

d) $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy$, unde C este curba definită parametric prin: $x=1+\cos t,\, y=1+\sin t,\, t\in[0,2\pi]$.

5. Integrale de suprafata

1) Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de prima speţă :

a) $\iint_S (x+y+z)\,d\sigma$, unde S este suprafaţa cubului $S=\{(x,y,z)/\,0\le x,y,z\le 1\}$.

b) $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, unde S este suprafaţa laterală a conului de ecuaţie $x^2+y^2=\frac{z^2}{4}$, cuprinsă între planele z = 0 şi z = 2;

c) $\iint_S z^2\,d\sigma$, unde S : $x=u\cos v,\, y=u\sin v,\, z=3u,\, u\in[0,1],\, v\in[0,2\pi]$.

d) $\iint_S \left(x^2+y^2\right)d\sigma$, unde S este sfera de ecuaţie $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2) Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de speţa a doua :

a) $\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$, unde S este faţa exterioară închisă a conului $z=\sqrt{x^2+y^2},\, z\in[0,1]$.

b) $\iint_S x^2\,dydz+y^2\,dzdx+z^2\,dxdy$, unde S este faţa exterioară a semisferei $x^2+y^2+z^2=a^2,\, z\ge 0$.

3) Calculaţi următoarele integrale curbilinii folosind formula lui Stokes :

a) $\int_C (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, unde C este cercul de ecuaţie :

$C: x^2+y^2+z^2=a^2,\, x+y+z=0$;

b) $\int_C x\,dx+(x+y)dy+(x+y+z)dz$, unde C este curba dată parametric prin

$C: x=a\sin t,\, y=a\cos t,\, z=a(\sin t+\cos t),\, t\in[0,2\pi]$;

4) Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de speţa întâi :

a) $\iint_S (x+y+z)d\sigma$, unde $S=\{(x,y,z)/\,x^2+y^2+z^2=a^2,\, z\ge 0\}$;

b) $\iint_S x\,y\,z\,d\sigma$, unde $S=\{(x,y,z)/\,x^2+y^2+z^2=a^2,\, x,y,z\ge 0\}$;

c) $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, unde $S=\{(x,y,z)/\,x^2+y^2=4,\, y\ge 0,\, z\in[0,5]\}$;

d) $\iint_S \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,d\sigma$, unde $S=\left\{(x,y,z)/\,z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right\}$;

e) $\iint_S (x\,y+y\,z+z\,x)d\sigma$, unde S este porţiunea suprafeţei conice $z=\sqrt{x^2+y^2}$ decupată de suprafaţa $x^2+y^2=2ax$;

5) Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de speţa a doua :

a) $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, unde S este faţa exterioară a sferei de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

b) $\iint\limits_S \frac{dy\,dz}{x} + \frac{dx\,dz}{y} + \frac{dx\,dy}{z}$, unde S este faţa exterioară a elipsoidului de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

6. Integrale triple

1) Să se calculeze următoarele integrale triple :

a) $\iiint_V x^3y^2z\,dv$, unde V : $0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le x\,y$;

b) $\iiint_V x^2\,dv$, unde V : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$;

c) $\iiint_V (x+y+z)^2\,dv$, unde V este partea comună a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ şi paraboloidului $x^2 + y^2 = 2a\,z$;

d) $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dv$, unde V : $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$;

2) Să se calculeze cu ajutorul formulei Gauss-Ostrogradski următoarele integrale de suprafaţă :

a) $\iint_S x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$, S fiind faţa exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

b) $\iint_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$, S fiind faţa exterioară a tetraedrului limitat de planele x = 0, y = 0 , z = 0 şi x + y + z = a.

3) Să se calculeze următoarele integrale triple:

a) $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, $D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \ge 0, x + y + z \le 1\}$;

b) $\iiint\limits_D xy\,dxdydz$, $D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \ge 0, z \le 1, x^2 + y^2 \le 1\}$;

c) $\iiint\limits_D xyz\,dxdydz$, $D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \ge 0, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$;

d) $\iiint\limits_D (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, $D = \left\{(x, y, z) \mid x, y, z \ge 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$;

4) Să se calculeze cu ajutorul formulei Gauss-Ostrogradski următoarele integrale de suprafaţă :

a) $\iint\limits_S x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$, unde S este frontiera domeniului spaţial $V = [0,a] \times [0,a] \times [0,a]$, $a > 0$;

b) $\iint\limits_S x^3\,dydz + y^3\,dzdx + z^3\,dxdy$, unde S este sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

7. Ecuatii diferentiale

7.1) Ecuatii cu variabile separabile:

a) $y' = x \cdot 2^{x^2+y}$

b) $y' = \dfrac{y^2+1}{x^2+1}$

c) $y' = y \cdot tg^2 x$

d) $yy' + (1+y^2)\sin x = 0$

e) $\dfrac{y}{x^2} y' - e^{x^3-y^2} = 0$

f) $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$

g) $(y^2+1)dx + (2x+1)y^2 dy = 0$

7.2) Ecuatii omogene:

a) $y' = \dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

b) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

c) $y' = \dfrac{2x-y}{x+2y}$

d) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

e) $2x + y = (4x - y)y'$

f) $(x^2+y^2)dy + 2xydx = 0$

7.3) Ecuatii reductibile la omogene:

a) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

b) $y' = \dfrac{2x+3y+1}{4x+6y+1}$

c) $y' = \dfrac{2x-y-1}{3x-y-2}$

d) $y' = \dfrac{x-3y+2}{-4x-y+5}$**,** cu $-4x - y + 5 \neq 0$

e) $(3x-7y-3)y' + 7x - 3y - 7 = 0$

f) $2(x-2y+1)dx + (5x-y-4)dy = 0$

7.4) Ecuatii liniare:

a) $y' = \dfrac{x+y}{x}$

b) $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{e^{2x-1}}{x^3}$

c) $y' + 2xy + x - e^{-x^2} = 0$

d) $y'+\frac{1}{x}y-x\sin x=0$

e) $y'+\frac{2}{x}y-\frac{\sin x}{x}=0$

7.5) Ecuatii Bernoulli si Riccati:

a) $y'=xy+x^2y^2$

b) $y'=y\cos x+y^2\cos x$

c) $xy'+y+x^5y^3e^x=0$

d) $y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2y^2}$

e) $y'+y^2\sin x-2\frac{\sin x}{\cos^2 x}=0,\ y_1=\frac{1}{\cos x}$

f) $y'=y^2-2e^xy+e^x+e^{2x},\ y_0=e^x$

g) $y'-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}$

7.6) Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n

a) $x^2y''-5xy'+8y=x$

b) $y''+2y'+2y=xe^{-x}+e^{-x}\cos x$

c) $y^{(4)}-5y''+4y=0$

d) $y^{(4)}-y^{(3)}-y'+y=e^x$

e) $y''-4y'+4y=0$

f) $y''+y'+3y=0$

g) $y''-8y'+15y=0$

h) $y''+y'+2y=0$

i) $y''+7y'+6y=0$

j) $y''-5y'+6y=6x^2-10x+2$

k) $3y''-2y'-y=x^2$

NOTA

Urmatoarele probleme reprezinta cerinte minimale pentru obtinerea notei 5:

- **cap. 1 - ex. 1, 2, 3, 8**
- **cap. 2 - ex. 1, 2**
- **cap. 3 - ex. 1, 2, 3**
- **cap. 4 - ex. 1, 2**
- **cap. 7 - ex. 1, 2, 4, 6**